

О МОНОТОННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРОЙ ДВУХ ЛИЦ

© 2008 г. Е. Г. Гольштейн

(Москва)

С игрой двух лиц связывается отображение, которое, в свою очередь, порождает вариационное неравенство. Задача отыскания точек Нэша игры сводится к решению этого неравенства. Отображение, связанное с неантагонистической игрой, не обязано быть монотонным. Численные методы решения вариационного неравенства существенно опираются на монотонность отображения, порождающего неравенство. Выявлен ряд классов неантагонистических игр двух лиц, для которых соответствующие отображения обладают свойством монотонности.

Пусть X_1 и X_2 — подмножества евклидовых пространств E_1 и E_2 , соответственно; f_i — функция, определенная конечными значениями на множестве $X = X_1 \times X_2 \subset E = E_1 \times E_2$. Введем игру Γ двух лиц, задаваемую множествами стратегий X_1 , X_2 и функциями выигрышей f_1, f_2 . Обозначим через X^* множество точек Нэша игры Γ , т.е. таких точек $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in X$, что

$$\max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2^*) = f_1(x_1^*, x_2^*), \quad \max_{x_2 \in X_2} f_2(x_1^*, x_2) = f_2(x_1^*, x_2^*). \quad (1)$$

Предполагая супердифференцируемость функции f_1 по $x_1 \in X_1$ и функции f_2 по $x_2 \in X_2$, свяжем с игрой Γ точечно-множественное отображение T_Γ множества X в подмножества евклидова пространства E , определяемое соотношением

$$T_\Gamma(x) = T_\Gamma(x_1, x_2) = \{t = (t_1, t_2) \in E: -t_i \in \partial_{x_i} f_i(x_1, x_2), i = 1, 2\}, \quad (2)$$

где $\partial_{x_i} f_i(x_1, x_2)$ — супердифференциал функции f_i в точке $x = (x_1, x_2)$ по x_i , $i = 1, 2$.

Отображение T_Γ порождает вариационное неравенство

$$t \in T_\Gamma, \quad \langle t, x' - x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in X. \quad (3)$$

Под решением вариационного неравенства (3) понимается любая точка $x^* \in X$, для которой $\langle t^*, x' - x^* \rangle > 0 \quad \forall x' \in X$, где $t^* \in T_\Gamma(x^*)$.

Из определений точки Нэша (1) и решения вариационного неравенства вытекает, что множество X^* точек Нэша игры Γ совпадает с множеством решений вариационного неравенства (3). Поэтому задача поиска точек Нэша игры Γ может считаться эквивалентной задаче решения вариационного неравенства (3).

Будем предполагать, что функции f_1, f_2 и множество X , определяющие игру Γ , удовлетворяют требованиям: X — непустой выпуклый компакт; функция f_1 определена на множестве $\tilde{X}_1 \times X_2$, вогнута по $x_1 \in \tilde{X}_1$ при любом фиксированном $x_2 \in X_2$ и непрерывна на $\tilde{X}_1 \times X_2$; функция f_2 определена на множестве $X_1 \times \tilde{X}_2$, вогнута по $x_2 \in \tilde{X}_2$ при любом фиксированном $x_1 \in X_1$ и непрерывна на $X_1 \times \tilde{X}_2$, где $X_i \subset \tilde{X}_i$; $\tilde{X}_i$ — выпуклое открытое множество, $i = 1, 2$. При соблюдении перечисленных требований соответствующую игру Γ условимся называть *выпуклой*.

Известно, что любая выпуклая игра имеет непустое множество точек Нэша X^* . Однако множество X^* не обязано быть выпуклым (например, оно может состоять из нескольких изолированных точек). Из элементов теории выпуклого анализа следует, что отображение T_Γ , определяемое выпуклой игрой Γ , удовлетворяет следующему условию.

Условие А. Множества X и $T_\Gamma(x)$ при любом $x \in X$ — непустые выпуклые компакты; множества $T_\Gamma(x)$, $x \in X$, равномерно ограничены; отображение T_Γ полунепрерывно сверху на X , т.е. если $x^k \in X \rightarrow x^0$, $t^k \in T_\Gamma(x^k) \rightarrow t^0$, то $t^0 \in T(x^0)$.

В работах (Гольштейн, 2002; Гольштейн, 2008) описан достаточно эффективный численный метод решения вариационного неравенства, которое порождено точечно-множественным монотонным отображением, удовлетворяющим условию А. Таким образом, возможность использования этого метода для отыскания точек Нэша выпуклой игры Γ зависит от монотонности отображения T_Γ . Учитывая определение (2) отображения T_Γ , условие монотонности этого отображения можно представить в следующем виде.

Условие В. Для произвольных

$$x'_1, x''_1 \in X_1, \quad x'_2, x''_2 \in X_2, \quad t'_i \in \partial_{x_i} f_i(x'_1, x'_2), \quad t''_i \in \partial_{x_i} f_i(x''_1, x''_2), \quad i = 1, 2,$$

имеет место неравенство

$$\langle t'_1 - t''_1, x'_1 - x''_1 \rangle + \langle t'_2 - t''_2, x'_2 - x''_2 \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Как показано в (Гольштейн, 2008), выпуклая игра Γ удовлетворяет условию В, если для нее соблюдаются следующие дополнительные требования.

Условие В'. Функция $f = f_1 + f_2$ является вогнутой и супердифференцируемой на $X = X_1 \times X_2$, функция $f_1(x_1, x_2)$ выпукла и субдифференцируема по $x_2 \in X_2$ при любом фиксированном $x_1 \in X_1$, функция $f_2(x_1, x_2)$ выпукла и субдифференцируема по x_1 при любом фиксированном $x_2 \in X_2$, функции f_1 и f_2 дифференцируемы по x_1 и x_2 , соответственно.

Займемся анализом условий В и В' применительно к так называемым *биматричным играм*. Пусть $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{m,n}$ и $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{m,n}$ — две произвольные матрицы с m строками и n столбцами. Биматричная игра $\Gamma(A_1, A_2)$ задается множеством стратегий первого игрока $X_1 = S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0: \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$, множеством стратегий второго игрока $X_2 = S_2 = \{y = (y_1, \dots, y_n)^T \geq 0: \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$ и функциями выигрышей игроков $f_i(x, y) = xA_i y$, $i = 1, 2$, где под τ понимается операция транспонирования. Нетрудно увидеть, что требование В для биматричной игры $\Gamma(A_1, A_2)$ имеет вид

$$(x' - x'')A(y' - y'') \leq 0 \quad \forall x', x'' \in S_1, \quad \forall y', y'' \in S_2, \quad (5)$$

где $A = A_1 + A_2$.

Проверим, что в случае биматричных игр условие В' является не только достаточным для соблюдения требования (5), но и необходимым. Действительно, в силу того, что функции выигрышей игроков в игре $\Gamma(A_1, A_2)$ линейны относительно x при фиксированном y и относительно y при фиксированном x , для этого достаточно убедиться в вогнутости функции $f(x, y) = xAy$ относительно $z = (x, y) \in S_1 \times S_2 = S$, если матрица A удовлетворяет условию (5).

Пусть $z' = (x', y')$ и $z'' = (x'', y'')$ — две произвольные точки множества S , $\lambda \in (0, 1)$, $z^\lambda = \lambda z' + (1 - \lambda)z''$. Имеем

$$\begin{aligned} f(z^\lambda) &= (\lambda x' + (1 - \lambda)x'')A(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') = \lambda^2(x' - x'')A(y' - y'') + \\ &\quad + \lambda[x''A(y' - y'') + (x' - x'')Ay''] + x''Ay'', \\ \lambda f(z') + (1 - \lambda)f(z'') &= \lambda(x'Ay' - x''Ay'') + x''Ay''. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (5) получаем

$$\begin{aligned} f(z^\lambda) - \lambda f(z') - (1 - \lambda)f(z'') &= \lambda^2(x' - x'')A(y' - y'') + \lambda[x''A(y' - y'') + (x' - x'')Ay''] - x'Ay' + x''Ay'' = \\ &= \lambda^2(x' - x'')A(y' - y'') + \lambda(x'' - x')A(y' - y'') = \lambda(1 - \lambda)(x'' - x')A(y' - y'') \geq 0, \end{aligned}$$

Итак, требование (5) влечет за собой вогнутость функции $f(x, y) = xAy$, т.е. для биматричных игр условия В и В' равносильны.

Чтобы ответить на вопрос о том, для каких матриц A_1, A_2 биматричная игра $\Gamma(A_1, A_2)$ удовлетворяет условию В, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $A = (a_{ij})_{m,n}$ — произвольная матрица с m строками и n столбцами, E_m и E_n — евклидовы пространства m -мерных векторов-строк и n -мерных векторов-столбцов, соответственно. Нижеследующие утверждения относительно матрицы A равносильны:

- a) $(x' - x'')A(y' - y'') \leq 0 \quad \forall x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$;
 b) $(x' - x'')A(y' - y'') = 0 \quad \forall x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$;
 c) $\exists \alpha_i, \beta_j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n): \alpha_{ij} = \alpha_i + \beta_j \quad \forall i, j$;
 d) $\forall x \in E_m, \forall y \in E_n \quad xAy = (\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i) \sum_{j=1}^n y_j + (\sum_{j=1}^n \beta_j y_j) \sum_{i=1}^m x_i$.

Дока з а т е л ь с т в о. Нам достаточно проверить, что утверждения последовательно следуют друг из друга.

1. $a \Rightarrow b$. Если $x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$, то согласно утверждению a имеем $(x' - x'')A(y' - y'') \leq 0$, $(x'' - x')A(y' - y'') \leq 0$, т.е. $(x' - x'')A(y' - y'') = 0$.

2. $b \Rightarrow c$. Пусть $x' \in S_1$ и $x'' \in S_1$ — единичные векторы-строки, у которых соответственно координаты i и l равны единице, $y' \in S_2$ и $y'' \in S_2$ — единичные векторы-столбцы, у которых соответственно координаты j и l равны единице. Согласно утверждению b $(x' - x'')A(y' - y'') = a_{ij} + a_{il} - a_{il} - a_{lj} = 0$, т.е. $\forall i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \quad a_{ij} = a_{il} + a_{lj} - a_{ll}$.

Полагая $\alpha_i = a_{il}, \beta_j = a_{lj} - a_{ll}$, приходим к утверждению c .

3. $c \Rightarrow d$. Для любых $x \in E_m, y \in E_n$ имеем:

$$xAy = x(\alpha_i + \beta_j)_{m,n}y = x(\alpha_i)_{m,n}y + x(\beta_j)_{m,n}y = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right) \sum_{j=1}^n y_j + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j \right) \sum_{i=1}^m x_i.$$

4. $d \Rightarrow a$. Если выполняется d , то при любых $x', x'' \in E_m, y', y'' \in E_n$ имеем

$$(x' - x'')A(y' - y'') = \sum_{i=1}^m \alpha_i (x'_i - x''_i) \left(\sum_{j=1}^n y'_j - \sum_{j=1}^n y''_j \right) + \sum_{j=1}^n \beta_j (y'_j - y''_j) \left(\sum_{i=1}^m x'_i - \sum_{i=1}^m x''_i \right).$$

Следовательно, для любых $x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$ имеет место равенство $(x' - x'')A(y' - y'') = 0$, т.е. справедливо утверждение b , а значит, и утверждение a .

В качестве очевидного следствия из леммы получаем следующую теорему.

Теорема 1. Для биматричной игры $\Gamma = \Gamma(A_1, A_2)$ отображение T_Γ является монотонным в том и только в том случае, если матрица $A = (a_{ij})_{m,n} = A_1 + A_2$ имеет вид $(\alpha_i + \beta_j)_{m,n}$.

Как следует из теоремы 1, класс биматричных игр $\Gamma = \Gamma(A_1, A_2)$, для которых отображение T_Γ монотонно, достаточно узок. Более того, в случае, если биматричная игра Γ принадлежит этому классу, то она легко приводится к эквивалентной антагонистической игре $\bar{\Gamma}$, множество седловых точек которой совпадает с множеством точек Нэша игры Γ .

Действительно, пусть $A = A_1 + A_2 = (\alpha_i + \beta_j)_{m,n}$. Положим $\bar{A}_1 = (\bar{a}_{ij}^{(1)})$, $\bar{A}_2 = (\bar{a}_{ij}^{(2)})$, где $\bar{a}_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - \beta_j$, $\bar{a}_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - \alpha_i$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Поскольку $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 = 0$, то $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ — антагонистическая игра. Эквивалентность игр Γ и $\bar{\Gamma}$ вытекает из того, что требования к точкам Нэша $(x^*, y^*) \in S_1 \times S_2$ игры Γ : $x A_1 y^* \leq x^* A_1 y^*$, $x \in S_1, x^* A_2 y \leq x^* A_2 y^*$, $y \in S_2$, и требования к седловым точкам $(x^*, y^*) \in S_1 \times S_2$ игры $\bar{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} x \bar{A}_1 y^* &= x A_1 y^* - \sum_{j=1}^n \beta_j y_j^* \leq x^* \bar{A}_1 y^* = x^* A_1 y^* - \sum_{j=1}^n \beta_j y_j^*, \quad x \in S_1, \\ x \bar{A}_2 y &= x^* A_2 y - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^* \leq x^* \bar{A}_2 y = x^* A_2 y - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^*, \quad y \in S_2, \end{aligned}$$

равносильны.

Свяжем с каждой биматричной игрой $\Gamma = \Gamma(A_1, A_2)$ модифицированную биматричную игру $\Gamma(R) = \Gamma(R, A_1, A_2)$ ($R > 0$), в которой функции выигрышей игроков определяются соотношениями:

$$f_{1R}(x, y) = x A_1 y - R|x|^2/2, \quad f_{2R}(x, y) = x A_2 y - R|y|^2/2, \quad x \in S_1, \quad y \in S_2. \quad (6)$$

Очевидно, что игра $\Gamma(R)$ – выпуклая при любом $R > 0$. Отображение $T_{\Gamma(R)}$, отвечающее игре $\Gamma(R)$, согласно (2) переводит каждую точку $z = (x, y) \in S_1 \times S_2$ в точку $T_{\Gamma(R)}(z) = (-A_1 y + Rx, -x A_2 + Ry) \in E_m \times E_n$.

Покажем, что при достаточно большом параметре R отображение $T_{\Gamma(R)}$ является монотонным.

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ij})_{m,n} = A_1 + A_2$, $|A| = (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2)^{1/2}$. Для монотонности отображения $T_{\Gamma(R)}$ на $E_m \times E_n$ достаточно, чтобы параметр R удовлетворял неравенству

$$R \geq |A|/2. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $z' = (x', y')$, $z'' = (x'', y'')$ – любые две точки евклидова пространства $E_m \times E_n$. Учитывая определение отображения $T_{\Gamma(R)}$, имеем

$$\begin{aligned} \langle T_{\Gamma(R)}(z') - T_{\Gamma(R)}(z''), z' - z'' \rangle &= \langle -A_1(y' - y'') + R(x' - x''), x' - x'' \rangle + \\ &+ \langle -(x' - x'')A_2 + R(y' - y''), y' - y'' \rangle = -(x' - x'')A(y' - y'') + R(|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим $|(x' - x'')A(y' - y'')|$:

$$\begin{aligned} |(x' - x'')A(y' - y'')|^2 &= \left| \sum_{j=1}^n (y'_j - y''_j) \sum_{i=1}^m a_{ij}(x'_i - x''_i) \right|^2 \leq \\ &\leq |y' - y''|^2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}(x'_i - x''_i) \right)^2 \right) \leq |y' - y''|^2 |x' - x''|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (a_{ij})^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|(x' - x'')A(y' - y'')| \leq |A| |x' - x''| |y' - y''|. \quad (9)$$

Из (9) с учетом того, что $|x' - x''| |y' - y''| \leq (|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2)/2$, получаем

$$|(x' - x'')A(y' - y'')| \leq |A| (|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2)/2. \quad (10)$$

Если $R \geq |A|/2$, то согласно (8) и (9) $\langle T_{\Gamma(R)}(z') - T_{\Gamma(R)}(z''), z' - z'' \rangle \geq 0$. Это указывает на монотонность отображения $T_{\Gamma(R)}$ на $E_m \times E_n$.

Оценка снизу (7) для параметра R не допускает улучшения для всех игр $\Gamma(R)$, определяемых матрицами A_1, A_2 и числом R . В качестве простейшего подтверждающего примера рассмотрим игру

$$\Gamma(R) = \Gamma(R, A_1, A_2), \quad m = n = 2, \quad A = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A| = 2$, то согласно теореме 2 отображение $T_{\Gamma(R)}$ является монотонным при $R \geq 1$. Положим $x' = (1, 0)$, $x'' = (0, 1)$, $y' = (1, 0)^T$, $y'' = (0, 1)^T$. Согласно (8) имеем

$$\langle T_{\Gamma(R)}(z') - T_{\Gamma(R)}(z''), z' - z'' \rangle = -(x' - x'')A(y' - y'') + R(|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2) = -4 + 4R.$$

Следовательно, при $0 \leq R < 1$ отображение $T_{\Gamma(R)}$ не является монотонным на $S_1 \times S_2$.

Вместе с тем, для некоторых игр $\Gamma(R)$ оценка (7) может быть улучшена. Возможность этого основана на следующем соображении. Предположим, что матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $A' = (a'_{ij})_{m,n}$ связаны соотношением $a'_{ij} = a_{ij} - \alpha_i - \beta_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. В таком случае при любых $x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$

$$(x' - x'')A(y' - y'') = (x' - x'')A'(y' - y''). \quad (11)$$

Равенство (11) вытекает из того, что согласно лемме для любой матрицы $A^0 = (\alpha_i + \beta_j)_{m,n}$ и произвольных $x', x'' \in S_1, y', y'' \in S_2$: $(x' - x'')A^0(y' - y'') = 0$. Поэтому в неравенстве (10), из которого вытекает оценка (7), можно заменить $|A|$ на $|A'|$, причем за счет выбора чисел α_i, β_j постараться уменьшить $|A'|$.

В результате приходим к задаче минимизации квадратичной функции $\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n) =$

$= |(a_{ij} - \alpha_i - \beta_j)_{m,n}|^2$. Приравнявая к нулю производные функции ϕ по α_i и β_j , получаем для α_i^* и β_j^* , при которых ϕ достигает минимума, систему уравнений

$$\alpha_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij}/n - \sum_{j=1}^n \beta_j^*/n, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \beta_j^* = \sum_{i=1}^m a_{ij}/m - \sum_{i=1}^m \alpha_i^*/m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (12)$$

Положим $u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}/n$, $1 \leq i \leq m$, $v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}/m$, $1 \leq j \leq n$, $a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}/(mn)$, $\alpha^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i^*/m$, $\beta^* = \sum_{j=1}^n \beta_j^*/n$.

Из (12) вытекает

$$\alpha_i^* = u_i - \beta^*, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \beta_j^* = v_j - \alpha^*, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (13)$$

Складывая левые части уравнения (13), приходим к соотношению

$$\alpha^* + \beta^* = \sum_{i=1}^m u_i/m = a. \quad (14)$$

Соединяя (13) и (14), окончательно получаем

$$\alpha_i^* + \beta_j^* = u_i + v_j - a, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (15)$$

Вычислим минимальное значение функции ϕ :

$$\begin{aligned} \phi_{\min} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \alpha_i^* - \beta_j^*)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - u_i - v_j + a)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i - v_j - a)^2 - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i + v_j - a). \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i + v_j - a)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i + v_j - a) = n \sum_{i=1}^m u_i^2 + m \sum_{j=1}^n v_j^2 - mna^2. \quad (17)$$

Из (16) и (17) получаем

$$\phi_{\min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - n \sum_{i=1}^m u_i^2 - m \sum_{j=1}^n v_j^2 + mna^2. \quad (18)$$

Поскольку

$$(mna)^2 = \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \right)^2 \leq m \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^2 = mn^2 \sum_{i=1}^m u_i^2,$$

то

$$mna^2 \leq n \sum_{i=1}^m u_i^2. \quad (19)$$

Аналогично проверяется справедливость неравенства

$$mna^2 \leq m \sum_{j=1}^n v_j^2. \quad (20)$$

Соотношения (18)–(20) приводят к оценке

$$\phi_{\min} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - \max \left\{ n \sum_{i=1}^m u_i^2, m \sum_{j=1}^n v_j^2 \right\}. \quad (21)$$

Равенство (18) и неравенство (21) приводят к следующему усилению теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $\Gamma(R) = \Gamma(R, A_1, A_2)$ – модифицированная биматричная игра, определяемая матрицами A_1, A_2 и параметром $R > 0, A = A_1 + A_2$. Для монотонности отображения $T_{\Gamma(R)}$ на $S_1 \times S_2$ достаточно, чтобы параметр R удовлетворял неравенству

$$R \geq R_0 = 0,5 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - n \sum_{i=1}^m u_i^2 - m \sum_{j=1}^n v_j^2 + mna^2 \right)^{1/2}, \quad (22)$$

где $u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}/n, v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}/m, a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}/(mn)$, причем

$$R_0 \leq 0,5 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - \max \left\{ n \sum_{i=1}^m u_i^2, m \sum_{j=1}^n v_j^2 \right\} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, если хотя бы на одной линии (строке или столбце) матрицы A сумма элементов не равна нулю, то оценка (22) является усилением оценки (7). Если же суммы элементов матрицы A , расположенные на любой линии, равны нулю, то оценки (22) и (7) совпадают. Заметим, что для матрицы $A = (\alpha_i + \beta_j)_{m,n}$ величина $R_0 = 0$, тогда как правая часть оценки (7), как правило, положительна.

В заключение обратимся к упоминавшемуся ранее примеру игры $\Gamma(R) = \Gamma(R, A_1, A_2)$ при

$$A = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

положив $A_1 = A_2 = A/2$. Поскольку $|A| = 2, u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = a = 0$ то согласно теореме 2 (равно как и теореме 3) отображение $T_{\Gamma(R)}$ является монотонным при $R \geq \Delta/2 = 1$. Как было показано ранее, при $0 \leq R \leq 1$ отображение $T_{\Gamma(R)}$ перестает быть монотонным.

Обозначим $Z^*(R)$ множество точек Нэша игры $\Gamma(R)$. Можно непосредственно проверить, что при $0 \leq R < 1$ множество $Z^*(R)$ состоит из трех точек: $((1, 0), (1, 0)), ((0, 1), (0, 1)), ((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$, множество $Z^*(1) = \{z = (x, y): x = \lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(0, 1), y = \lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(0, 1), 0 \leq \lambda \leq 1\}$, множество $Z^*(R)$ при $R > 1$ содержит единственную точку $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$. Таким образом, множество $Z^*(R)$ при $R \geq 1$ является выпуклым, поскольку совпадает с множеством решений вариационного неравенства, порождаемого монотонным отображением $T_{\Gamma(R)}$. Однако при $0 \leq R < 1$ отображение $T_{\Gamma(R)}$, как было показано выше, перестает быть монотонным на $S_1 \times S_2$, что влечет за собой невыпуклость множества $Z^*(R)$.

Рассмотренный пример показывает, что для модифицированных биматричных игр условие B' является лишь достаточным для соблюдения условия B . Действительно, как легко проверить, что

функция $f(x, y) = x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y - \frac{R}{2} (|x|^2 + |y|^2)$ является вогнутой на $S_1 \times S_2$ только при $R \geq 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гольштейн Е.Г. (2002): Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями // *Журнал вычислительной мат. и мат. физики*. Т. 42. № 7.
- Гольштейн Е.Г. (2008): Метод решения вариационных неравенств, использующий неточные исходные данные // *Экономика и мат. методы*. Т. 44. Вып. 3.

Поступила в редакцию
04.04.2008 г.

On the Monotony of Mapping Related to the Non-antagonistic Two-Person Game**Ye. G. Golshtein**

We consider a two-person game and an associated mapping which in its turn generates a variational inequality problem. The problem of finding the Nash points of the game is reduced to the solution of the above-mentioned inequality. However the mapping thus related to a non-antagonistic game need not be monotone, where as the standard numerical methods to solve variational inequality problems work well when the mapping in question is monotone. In our research we have revealed a series of classes of non-antagonistic two-person games which associated mappings generating the corresponding variational inequality problem, are monotone.