

© 2019

Алла Салмина

кандидат социологических наук, старший научный сотрудник
Института социального анализа и прогнозирования Российской академии
народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ,
г. Москва
(e-mail: salmina-aa@ranepa.ru)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕРАВЕНСТВА – ИХ ОСОБЕННОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕ

В статье показано многообразие показателей неравенства, используемых международными исследовательскими организациями и статистическими службами отдельных стран, выявлены их преимущества и недостатки. Освещаются новые методологические разработки в данной области. В статье описан также ряд относительно новых показателей, которые могут быть полезны для измерения динамики и структуры неравенства.

На основании сравнительного анализа показателей неравенства автор дает ряд рекомендаций по расширению списка показателей, традиционно применяемых для оценки неравенства в России.

Ключевые слова: неравенство, коэффициент Джини, децильный коэффициент, квинтильный коэффициент, кривая Лоренца, коэффициент Пальма, показатели общей энтропии, индекс Тейла, среднее логарифмическое отклонение, индекс Аткинсона, индекс Пьетра, индекс Робин Гуда, индекс Гувера, индекс Шутца, индекс МакЛун, индекс Зенга.

DOI: 10.31857/S020736760005832-4

В последнее время существенно возрос интерес со стороны ученых к изучению неравенства россиян по доходам (Novokmet, Piketty, Zucman, 2018; Ророва, Rudberg, 2018; Капелюшников, 2017; Овчарова и др., 2014, 2016; Авраимова, Малева, 2014; Зубаревич, 2013; Бурдяк, 2015; Аганбегян, 2017; Григорьев, 2016; Григорьев, Павлюшина, 2018; Григорьев, Салмина, 2013; Салмина, 2014; Аникин, Тихонова, 2016; Джомо, Попов, 2016 и др.), в то же время по-прежнему меньше внимание уделяется методологии расчета показателей неравенства. В исследованиях неравенства, как правило, используется стандартный набор показателей, например, коэффициент Джини и децильный коэффициент. При этом часто не учитываются математические свойства показателей и их влияние на оценки неравенства. На эту проблему указывал Энтони Аткинсон еще в 1970 г.: «Традиционный подход почти во всех эмпирических работах заключается в принятии некоторой сводной статистики неравенства, такой как дисперсия, коэффициент вариации или коэффициент Джини, без какой-либо явной причины для предпочтения одной меры, а не другой. Однако, как отметил Далтон 50 лет назад в своей новаторской статье (Dalton, 1920), в основе любой такой меры лежит некая концепция социального благосостояния, и именно эта концепция нас должна беспокоить» (Atkinson, 1970, p. 244).

* Статья подготовлена в рамках научно-исследовательской работы РАНХиГС «Новые подходы к измерению неравенства: дифференциация доходов и стартовых возможностей» в 2019 г.

Показатели неравенства и их свойства

Показатели (меры) неравенства описывают распределение ресурсов среди определенной совокупности индивидов (или регионов), составляющих определенную социальную общность, и в той или иной мере предполагают сравнение с ситуацией абсолютного равного распределения. В отличие от бедности, неравенство является более широким понятием и охватывает не только население ниже определенного минимального уровня доходов (Naughton, Khandker, 2009, р. 101). Оценки неравенства различаются в зависимости от выбранных подходов к его измерению.

В данном разделе рассмотрены показатели, используемые для измерения неравенства. В него не включены меры центральной тенденции (среднее арифметическое, мода и медиана), показатели дисперсии, которые являются наиболее простыми статистическими характеристиками, а также доли доходов отдельных групп населения. Под модальным доходом понимается наиболее часто встречающееся его значение в распределении. Медианным называется такое значение дохода, которое делит все распределение на две равные части. Если проранжировать доходы всех людей исследуемой совокупности в порядке возрастания, то медиана укажет то значение, меньше которого имеют доходы нижние 50% населения. Важно отметить, что в странах ОЭСР, как правило, для оценок неравенства и бедности используется именно медианное значение, а не среднее. В то время как федеральная служба государственной статистики России все еще отдает предпочтение именно среднему значению, а не медианному.

Коэффициент Джини и кривая Лоренца

Самым популярным показателем для описания неравенства является коэффициент Джини. Данный статистический показатель, названный в честь итальянского экономиста Коррадо Джини, показывает, насколько фактическое распределение измеряемых величин, например, уровня дохода населения, отклоняется от полностью равномерного их распределения между индивидами. Он изменяется от 0 до 1, где 0 означает ситуацию полного равенства, а 1 — крайнего неравенства, когда вся совокупность доходов в распределении принадлежит одному индивиду.

Графически кривая распределения коэффициента Джини изображается в виде кривой Лоренца, где по горизонтальной оси отображается распределение совокупной численности населения, как правило, в виде процентилей, ранжированных по уровню обеспеченности, а на вертикальной оси — доли совокупного дохода соответствующих процентилей. Пример кривой Лоренца представлен на рисунке 1. В графическом виде значение коэффициента Джини представляет собой отношение площади фигуры между прямой ситуации идеального равенства (или — «эгалитарной прямой»), расположенной под углом 45°, и кривой Лоренца, отображающей кривую фактического распределения, к площади образованного прямой равенства и осями треугольника.

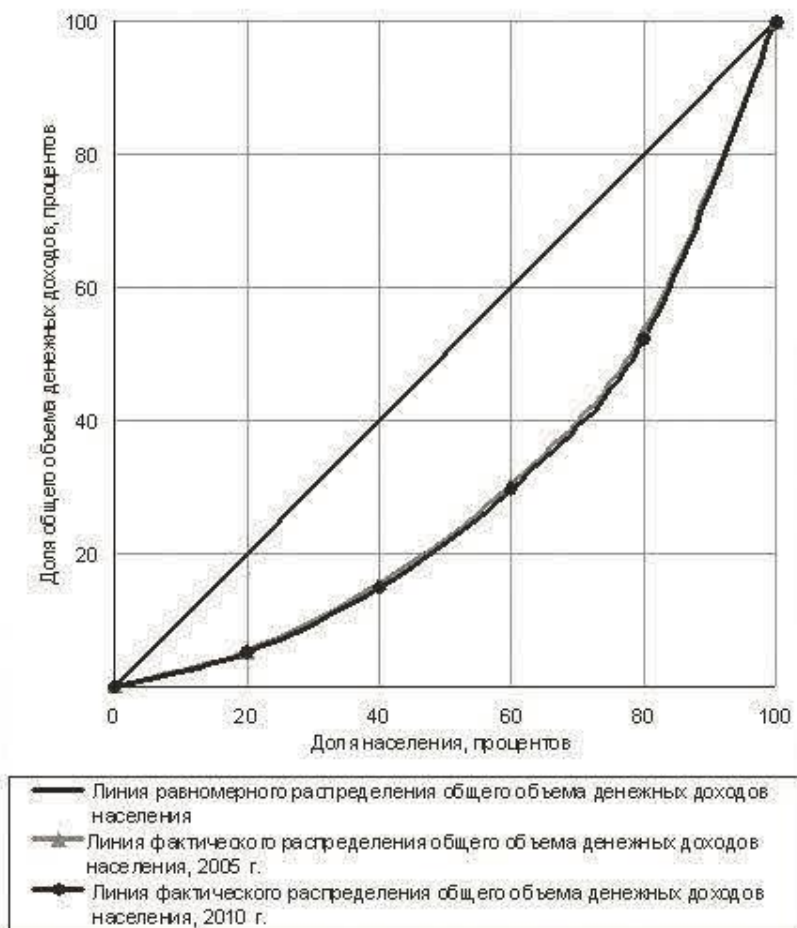


Рис. 1. Кривая Лоренца распределения общего объема денежных доходов населения России (2005, 2010 гг.)

Источник: Росстат. URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/b11_44/IssWWW.exe/Stg/d01/05-03.htm.

Существует много способов расчета коэффициента Джини. Наиболее популярным является следующий (Pyatt et. al., 1980):

$$G = \frac{2covar(y, r_y)}{N\bar{y}}, \quad (1)$$

где,

y — доход индивида, $\bar{y}$ — средний доход, N — количество индивидов, $covar(y, r_y)$ — это ковариация между доходом и рангами индивидов, ранжированных по уровню их доходов от минимального (ранг — 1) к максимальному доходу (ранг — N).

Бранко Миланович в 1997 г. предложил еще более удобный вариант расчета:

$$G = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_y}{\bar{y}} p(y, r_y), \quad (2)$$

где,

σ_y — среднеквадратическое отклонение доходов, $\bar{y}$ — ожидаемое или среднее значение дохода, p — корреляция (Milanovic, 1997, p. 46).

Таким образом, коэффициент Джини равен произведению константы, коэффициента вариации доходов и корреляции между доходами индивидов и их рангами.

Еще один вариант расчета:

$$G = \frac{1}{2n^2 \bar{y}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_j - y_i|, \quad (3)$$

где,

$\bar{y}$ — это средний доход населения, n — численность населения, y_i — это доход i -го индивида, y_j — это доход j -го индивида.

Из формулы следует, что коэффициент Джини представляет собой приблизительно среднее абсолютных различий доходов между всеми парами индивидов в выборке. При минимальном значении коэффициента, равном нулю, различия всех доходов равны, а при максимальном, равном единице, — все индивиды, кроме одного, имеют нулевые доходы (Stuart, Ord, 1994).

Все представленные выше способы расчета коэффициента Джини измеряют относительное неравенство. Данный коэффициент можно рассчитать и для абсолютного неравенства. Главное их отличие в том, что абсолютный показатель не нормируется на средний доход населения страны. Формула расчета абсолютного коэффициента Джини выглядит следующим образом:

$$GA = \bar{y} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1) \tilde{y}_i, \quad (4)$$

где,

$\tilde{y}$ — это ранжированные значения y .

Томас Года отмечает, что по своим математическим свойствам абсолютные показатели неравенства (индекс Джини и дисперсия) не уступают своим относительным аналогам (стандартный индекс Джини и индекс Тейла) (Chakravarty, 2001). Они отвечают почти всем требованиям хороших показателей неравенства (см. далее), таким, как независимость от среднего значения распределения, независимость от количества наблюдений, симметричность, чувствительность к перераспределению (Chakravarty, 2001). Несмотря на данные положительные свойства абсолютных показателей неравенства, в дальнейшем в данном разделе речь будет идти именно об относительных показателях.

Содержательно коэффициент Джини можно интерпретировать как ожидаемый разрыв в доходах между двумя индивидами, случайно отобранными из общей выборки населения страны. Фрэнк Фаррис обратил

внимание на следующее математическое свойство коэффициента Джини (Farris, 2010). Если индекс Джини по доходам домохозяйств равен $x\%$, то минимальное из доходов двух домохозяйств, отобранных случайным образом, составляет $\frac{1-x}{x}$ процентов (Farris, 2010, p. 858). Например, в России коэффициент Джини (по располагаемому доходу) в 2011 г. по расчетам ОЭСР был равен 0,376. Следовательно, меньшее значение дохода из двух случайно выбранных жителей России, было равно примерно 62,4% от среднего располагаемого дохода (26704 руб.) или 16663 руб.

Популярность коэффициента Джини связана с возможностью сравнивать его значение между группами с различной численностью (различные группы населения, регионы). Он не требует сложных математических вычислений, является прозрачным и понятным для широкой аудитории показателем неравенства.

Несмотря на очевидные положительные качества коэффициента Джини, определяющие его популярность, существует и ряд серьезных недостатков. Один из главных – его излишняя чувствительность к изменениям в средней части кривой распределения доходов (Gastwirth, 2017). Это свойство коэффициента особенно важно принимать во внимание при исследованиях неравенства в России. Согласно исследованиям, распределение доходов в России имеет тяжелый правый хвост (Ibragimov et al., 2012, 2018). Поэтому коэффициент Джини может существенно занижать динамику неравенства в России. Необходимо также отметить, что коэффициент Джини не обладает свойством «полной декомпозиции» (см. далее) – его невозможно раскладывать на составляющие без остатка.

Индекс Пьетра (Робин Гуда)

Производным от кривой Лоренца является менее популярный показатель – индекс Пьетра (на англ. – “Pietra index”), известный также как индекс Робин Гуда (на англ. – “Robin Hood index”), индекс Гувера (на англ. – “Hoover index”) и индекс Шутца (на англ. – “Schutz index”). Несмотря на столь многое количество названий, на практике он используется редко.

Формула для расчета индекса Пьетра:

$$H(x) = \frac{\sum_{\{i: x_i \geq \bar{x}\}} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n x_i}, \quad (5)$$

где,

x_i – значение дохода i -го индивида, $\bar{x}$ – среднее значение дохода.

Численное значение индекса показывает, какую долю совокупного дохода нужно перераспределить от индивидов с доходами выше среднего по стране к индивидам с доходами ниже среднего для приближения к ситуации полного равенства в доходах (диагональ под углом 45°). На графике он

представляет собой максимальное вертикальное расстояние между кривой Лоренца и прямой идеального равенства. Значение индекса изменяется от 0 до 1, где 0 означает полное равенство доходов. Индекс принимает значение 0, когда кривая Лоренца полностью совпадает с диагональю, расположенной под углом 45°. Чем больше значение индекса, тем ближе кривая Лоренца приближается к нижнему правому углу.

Этот индекс часто называют индексом Робин Гуда, так как, по сути, он отражает ту долю доходов, которую надо перераспределить от богатых к бедным. При этом граница, отделяющая «бедных» от «богатых», определяется координатами точки наибольшего отклонения кривой Лоренца от прямой идеального равенства. Чем больше значение индекса, тем выше неравенство и тем более необходимы меры по перераспределению доходов. Мы полагаем, что индекс Пьетра (Робин Гуда) сравнительно недооценен западными и российскими учеными. Среди российских исследований можно отметить только исследование новосибирского экономиста Е. Стукаленко (2017). Индекс Пьетра, наряду с более известным коэффициентом Джини, был рассчитан автором в рамках исследования российских регионов. Расчеты показали, что за период с 2000 по 2014 гг. динамика двух данных индексов в регионах довольно схожа. В 2014 г. значение индекса Пьетра для среднедушевого дохода составило 0,14, для ВРП на душу населения — 0,33 (Стукаленко, 2017, с. 109). Это означает, что для достижения ситуации идеального равенства необходимо перераспределить 14% доходов от богатых регионов к бедным или 33% совокупного ВРП. Граница, разделяющая бедные и богатые регионы была определена на уровне 5920 рублей для среднедушевого дохода и 70936 для ВРП на душу населения (Стукаленко, 2017, с. 110).

Соотношение доходов отдельных квантилей населения

Одними из наиболее простых — для расчета и интерпретации — оценок дифференциации доходов населения являются показатели соотношения доходов отдельных квантилей распределения. Наиболее популярным из данного класса показателей является децильный коэффициент фондов, который рассчитывается как отношение средних доходов верхнего дециля населения с самыми высокими доходами к нижнему децилю с самыми низкими доходами. В международной практике часто используется также квинтильный коэффициент (на англ. — “income quintile ratio”), сравнивающий доходы 20-процентных групп населения. Он оценивается как соотношение между средними доходами 20-процентной группы с самыми высокими доходами и 20-процентной группы с самыми низкими доходами. Данный показатель используется ОЭСР и Программой развития человеческого капитала ООН (UNDP, 2016).

Децильный коэффициент дифференциации (P90/P10) представляет собой отношение самого низкого значения дохода среди 10% населения с самыми высокими доходами к самому высокому значению дохода среди 10% населения с самыми низкими доходами. В частности, ОЭСР использует именно данный коэффициент, а не коэффициент фондов. Помимо этого ОЭСР регулярно рассчитывает также следующие

разновидности децильного коэффициента дифференциации: «P90/P50» и «P50/P10». Децильный коэффициент дифференциации «P90/P50» рассчитывается как отношение минимального размера доходов 10% наиболее богатых жителей к медианному доходу; коэффициент «P50/P10» – как отношение медианного дохода к максимальному размеру доходов 10% наименее бедных жителей.

Квинтильный коэффициент:

$$K_{\text{quintile}} = \frac{\bar{q}_5}{\bar{q}_1}, \quad (6)$$

где,

$\bar{q}_1$ – средние доходы 1-го (самого нижнего) квинтиля, $\bar{q}_5$ – средние доходы 5-го (самого верхнего) квинтиля.

Децильный коэффициент фондов:

$$K_{\text{фондов}} = \frac{\bar{d}_{10}}{\bar{d}_1}, \quad (7)$$

где,

$\bar{d}_{10}$ – средние доходы 10-го (самого верхнего) дециля, $\bar{d}_1$ – средние доходы 1-го (самого нижнего) дециля.

Децильный коэффициент дифференциации «P90/P10»:

$$K_d = \frac{d_9}{d_1}, \quad (8)$$

где,

d_9 – минимальный доход 10-го дециля, d_1 – максимальный доход 1-го дециля.

Децильный коэффициент дифференциации «P90/P50»:

$$K_d = \frac{d_9}{d_5}, \quad (9)$$

где,

d_9 – минимальный доход 10-го дециля, d_5 – медианный доход.

Децильный коэффициент дифференциации «P50/P10»:

$$K_d = \frac{d_5}{d_1}, \quad (10)$$

где,

d_5 – медианный доход, d_1 – максимальный доход 1-го дециля.

С рассмотренным в данном разделе классом показателей связан также коэффициент Херфиндаля (на англ. – “Herfindahl coefficient”). Данный коэффициент (в силу его слабой известности и малой эмпирической значимости для оценки неравенства) мы не включаем в сравнительный анализ показателей неравенства, но все же считаем важным его упомянуть. Он более известен среди экономистов как показатель степени монополизации отрасли (другое название – коэффициент

Херфиндаля-Хиршмана), но его можно встретить и в литературе по неравенству населения (Cowell, 2009). Формула для расчета коэффициента Херфиндаля выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{n} [c^2 + 1] = \sum_{i=1}^n s_i^2, \quad (11)$$

где,

c — коэффициент вариации, s — доля доходов групп населения. Максимум этого коэффициента равен 1. Коэффициент зависит от размера населения. С ростом численности населения коэффициент уменьшается (Cowell, 2009, p. 72, 153).

Коэффициент Пальма

Отдельного внимания заслуживает **коэффициент Пальма** (на англ. — “Palma ratio”). Этот показатель представляет собой соотношение между общими объемами денежных доходов 10% населения с самыми высокими доходами и 40% с самыми низкими доходами.

$$K_{palma} = \frac{d_{10}}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}, \quad (12)$$

где,

d_i — совокупные денежные доходы i -го дециля.

Коэффициент Пальма, несмотря на свою простоту, появился сравнительно недавно. В его основе лежат результаты исследований чилийского экономиста Хосе Пальма (Palma, 2011, 2014), согласно которым отличия в распределении доходов между странами главным образом связаны с разрывом в доходах между наиболее (верхние 10%) и наименее богатыми слоями населения (нижние 40%), в то время как доходы оставшейся части населения (50%) относительно стабильны (UN, 2015, p. 2; Cobham et al., 2015). Методологические свойства и преимущества данного коэффициента были апробированы и обоснованы в статье в статье Алекса Кобхэма, Люка Шлогла и Энди Самнера (Cobham et al., 2015). Появление их статьи вызвало серию обсуждений коэффициента Пальма и его возможного превосходства над коэффициентом Джини. ОЭСР на регулярной основе рассчитывает коэффициент Пальма для ряда стран, не входящих в ОЭСР, включая Россию. Последние данные по России представлены за 2011 г.

Главным недостатком коэффициента Пальма, а также других показателей соотношения доходов отдельных квинтилей населения является то, что они не учитывают распределение доходов всего населения. Таким образом, упускается из внимания информация о доходах не включенных в расчет групп населения. В то же время во многих случаях такая оценка может дать более ясную картину. Как было сказано выше, согласно некоторым исследованиям, доходы «средних» 50% населения отличаются стабильностью, в то время как основные изменения происходят в соотношении доходов полярных — наиболее и наименее богатых слоев населения.

Индекс МакЛун

Индекс МакЛун (на англ. – “McLoone”) малоизвестен и чаще используется в исследованиях неравенства в сфере образования (Kelly, 2015). Среди международных проектов, в которых он применяется, можно отметить Техасский проект по изучению неравенства. Он представляет интерес как индикатор неравенства в нижней части распределения.

Индекс рассчитывается как отношение суммы всех наблюдений на уровне или ниже медианы к произведению значения медианы и количества всех наблюдений на уровне или ниже медианы (Hale, 2014). Чем выше его значение, тем равномернее распределение. Фактически он сравнивает нижнюю часть распределения с медианой.

Формулу для расчета данного индекса можно представить следующим образом:

$$M = \frac{\sum_1^n X_n}{n \times x_{med}}, \quad (13)$$

где, X_n – доходы людей на уровне или ниже медианы, n – число людей с доходами на уровне или ниже медианы, x_{med} – медианный доход.

Индекс изменяется от 0 до 1. Чем ближе его значение к единице, тем больше равенство.

Индекс Тейла и другие показатели общей энтропии

Для измерения вклада в неравенство отдельных его составляющих существуют методы его разложения (или далее – декомпозиции). Чаще всего для этого используется отдельный класс показателей общей энтропии, самым известным из которых является индекс Тейла. Главным преимуществом показателей энтропии является их полная разложимость на составляющие по отдельным группам или измерениям неравенства. В качестве групп могут выступать как группы населения по отдельным характеристикам (пол, возраст, образование, главный источник дохода и др.), так и регионы. Показатели энтропии имеют шкалу от 0 до бесконечности, где 0 соответствует ситуации совершенного равенства.

Общая формула для показателей энтропии выглядит следующим образом:

$$GE(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i}{\bar{y}} \right]^\alpha - 1 \right], \alpha \neq 0, 1 \quad (14)$$

Показатели энтропии различаются в зависимости от выбранного веса (различий доходов) α для отдельных отрезков распределения. Индекс “Theil’s L” ($GE(0)$), известный также как «среднее логарифмическое отклонение» (на англ. – “mean log deviation”) имеет параметр α , равный нулю. В индексе “Theil’s T” ($GE(1)$) α равен единице. Как правило, именно этот индекс в большинстве источников называется «индексом Тейла». В «коэффициенте вариации» ($GE(2)$) (на англ. – “coefficient of variation”) α равно двум. Он равен половине квадрата коэффициента вариации.

Чем меньше параметр α , тем более индекс чувствителен к изменениям в нижнем «хвосте» распределения, и наоборот (UN, 2015, р. 2; Bellu, Liberati, 2006). Индекс Тейла ($\alpha=1$) приписывает всем частям распределения равные веса. Если передать часть доходов от одного индивида, имеющего доходы X , к другому индивиду с более низкими доходами Y , то эффект от этого трансферта будет одинаковым независимо от размера дохода Y (Sen, 1997, р. 28; Punt et al., 2003, р. 4). Среднее логарифмическое отклонение ($\alpha=0$) придает больший вес различию (расстоянию) между доходами в нижней части распределения, а коэффициент вариации ($\alpha=2$) – в верхней части распределения (Punt et al., 2003, р. 18). Поэтому среднее логарифмическое отклонение ($\alpha=0$) больше подходит для оценки неравенства в нижней части распределения.

Среднее логарифмическое отклонение (на англ. – “mean log deviation”, “MLD”, “Theil’s L”) вычисляется по формуле:

$$GE(0) = MLD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(ns_i) \quad (15)$$

Индекс Тейла (на англ. – “Theil’s T”):

$$GE(1) = THEIL = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) = \sum_{i=1}^n s_i \log(ns_i) \quad (16)$$

Коэффициент вариации:

$$GE(2) = \frac{1}{2n\bar{y}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (17)$$

Выбор показателя энтропии зависит от приоритетных задач исследования. Чаще всего для декомпозиции применяется среднее логарифмическое отклонение. Так, С. Ананд и П. Сигал (Anand, Segal, 2015) делают свой выбор в пользу данного показателя по совету Б. Милановича, – чтобы не было зависимости значений компонентов от остатка декомпозиции (Milanovic, 2013, р. 205). Среднее логарифмическое отклонение используется также в исследованиях большинства российских авторов (Овчарова, Попова, Рудберг, 2016; Овчарова и др., 2014).

Показатели общей энтропии лучше, чем коэффициент Джини, подходят для разложения, или декомпозиции, неравенства на компоненты. Разложение коэффициента Джини считается менее точным, так как при этом остается не подающийся интерпретации остаток. В то же время из-за относительной сложности расчета показатели общей энтропии менее популярны, чем коэффициент Джини. Поэтому их чаще можно встретить в научных статьях отдельных авторов, чем в исследованиях неравенства международных организаций, рассчитанных на широкую категорию читателей.

Индекс Аткинсона

Нормативные представления о неравенстве позволяет учитывать индекс Аткинсона. Формула для его расчета включает в себя представления общества о допустимой глубине неравенства (параметр ϵ). Значения этого параметра нормативных представлений (или степени «неприятия неравенства»)

задает сам ученый. Индекс Аткинсона показывает процентную долю совокупного дохода, которую необходимо перераспределить для достижения большего равенства (более справедливого разрыва в доходах) между гражданами в соответствии с нормативными представлениями о допустимой глубине неравенства (Naughton, Khandker, 2009, p. 107).

Энтони Аткинсон создал данный индекс в качестве альтернативы индексу Джини, главным недостатком которого он считал одинаковую чувствительность к изменениям дохода на всех отрезках распределения. Созданный им индекс позволяет придавать разный вес различиям доходов в отдельных частях распределения.

Индекс Аткинсона рассчитывается по формуле:

$$A_{\varepsilon} = 1 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)}, \quad (18)$$

где,

ε – параметр представлений общества о допустимой глубине неравенства, $\bar{y}$ – это среднее арифметическое распределения.

Значения индекса изменяются от 0 до 1, при этом 0 означает равное распределение.

Параметр ε в данной формуле может меняться от 0 до бесконечности. Значение параметра ε , равное нулю, означает, что исследователю неравенства безразличен характер распределения. В данном случае население равнодушно к любым проявлениям неравенства. Чем больше значение ε , тем более индекс Аткинсона чувствителен к изменениям в нижней части распределения и тем большая социальная полезность может быть достигнута путем полного перераспределения доходов. Приближение ε к бесконечности означает, что исследователя интересуют только доходы самых бедных слоев (De Maio, 2007).

При ε , равном единице, формула Аткинсона принимает следующий вид:

$$A_{\varepsilon} = 1 - \frac{\Pi_{i=1}^N (y_i^{(1/N)})}{\bar{y}}. \quad (19)$$

Как правило, на практике используются следующие значения параметра нормативных представлений ε : 0; 0,5; 1,0; 1,5 и 2. На Рис. 2 для различных его значений представлены функции благосостояния. В данном случае значение ε , равное 0,5, означает низкую степень неприятия неравенства, 1,0 – среднюю степень и 2,0 – высокую степень неприятия неравенства.

Формула расчета индекса Аткинсона с параметром ε , равным единице, используется Программой развития ООН при построении индексов человеческого развития, скорректированных с учетом неравенства. В конце 1990-х гг. была предпринята попытка использования индекса Джини для расчета индекса человеческого развития (Hicks, 1997). Но в дальнейшем все же было решено использовать индекс Аткинсона. Программа развития ООН объясняет выбор индекса Аткинсона тремя его

свойствами, которыми не обладает индекс Джини: 1) согласованность подгрупп (на англ. — “subgroup consistency”), 2) чувствительность к неравенству в нижнем конце распределения и 3) простота вычислений и математическая элегантность получающегося на его основе индекса человеческого развития, скорректированного с учетом неравенства. Согласованность подгрупп означает, что «если неравенство уменьшается в одной подгруппе (регион, этническая группа и т. д) и остается неизменным в остальной части населения, то общее неравенство уменьшается»². Большая чувствительность индекса Аткинсона к изменениям в нижней части распределения делает его подходящим показателем для оценки неравенства по показателям грамотности, детской смертности и бедности по доходам.

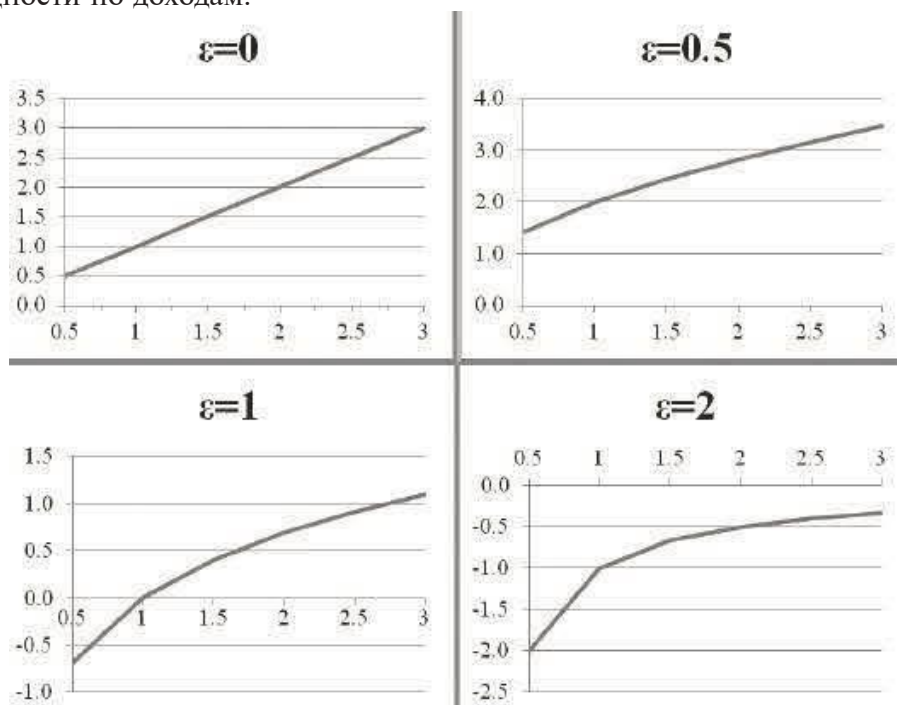


Рис. 2. Функции благосостояния для разных значений показателя ϵ (для расчета индекса Аткинсона)

Источник: (Klasen et al., 2016, p. 21.)

В основе индекса Аткинсона лежат представления о «социальной полезности» перераспределения. С этой точки зрения параметр ϵ показывает меру социальной полезности, которую можно достичь за счет полного перераспределения доходов (De Maio, 2007). Таким образом, значения индекса для разных ϵ позволяют сравнивать уровни неравенства при разных полезностях перераспределения. Иначе говоря, индекс Аткинсона показывает потери общественного блага из-за неравенства.

² ООН (ИЧР). Официальный сайт Программы развития ООН: <http://hdr.undp.org/en/content/gini-coefficient-not-sufficient-measure-inequality-what-difference-between-gini-and-atkinson>.

Индекс Аткинсона, как и показатели общей энтропии, обладает свойством полной разложимости. Можно проводить декомпозицию данного индекса на составляющие неравенства между группами и внутри групп населения (UN, 2015, p. 1).

Новый индекс Зенга

В качестве альтернативы коэффициенту Джини в 2007 г. Мишель Зенга предложила новый индекс (Zenga, 2007). Индекс был назван по имени автора – индекс Зенга. Он выводится на основе открытой ранее автором кривой распределения Зенга I (p). В основе индекса и кривой Зенга лежит сравнение арифметического среднего доходов двух групп, которые условно можно назвать «нижней» и «верхней» группами. Для того чтобы упорядоченные данные доходов (далее – переменная x , принимающая только положительные значения) разделить на две группы, нужно выбрать точку разделения таким образом, что по одну сторону будут лежать меньшие значения, а по другую – большие (Zenga, 2007; Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 38–39).

$$\{(x_j, n_j): j = 1, \dots, s; 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_s; \sum_{j=1}^s n_j = N\}$$

Нижняя группа: $\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_j, n_j)\}$.

Верхняя группа: $\{(x_j, n_j), (x_{j+1}, n_{j+1}), \dots, (x_s, n_s)\}$.

Для каждой точки разделения нужно посчитать средние значения для нижней и верхней группы. «Нижним средним» $M^-(p_j)$ называется среднее значение для нижней группы, а «верхним средним» $M^+(p_j)$ – для верхней группы (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 39).

$$M^-(p_j) = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^j x_i n_i, \quad (20)$$

$$M^+(p_j) = \frac{1}{N - N_{j-1}} \sum_{i=j}^s x_i n_i, \quad (21)$$

где $j = 1, \dots, s$; $N_j = \sum_{i=1}^j n_i$; $p_j = \frac{N_j}{N}$.

Нижнее и верхнее среднее сравниваются при помощи следующего индекса:

$$U(p_j) = M^-(p_j) / M^+(p_j). \quad (22)$$

В результате мы получаем точечную меру равномерности распределения – долю нижнего среднего значения относительно верхнего среднего (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 39). Индекс неравенства в определенной точке считается по формуле:

$$I(p_j) = 1 - U(p_j). \quad (23)$$

Таким образом, сам индекс Зенга представляет собой взвешенное арифметическое среднее точечных мер:

$$Z = \sum_{j=1}^s I(p_j) \frac{n_j}{N}. \quad (24)$$

Индекс Зенга принимает значение 0 в случае отсутствия неравенства. Значение $I(p_j)$ и $U(p_j)$ лежат в диапазоне от 0 и 1. $U(p_1) = \frac{x_1}{M}$; $U(p_s) = \frac{M}{x_s}$; $I(p_1) = 1 - \frac{x_1}{M}$, $I(p_s) = 1 - \frac{M}{x_s}$, где M — это среднее всех наблюдений (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 39–40).

В отличие от кривой Лоренца, форма кривой Зенга не ограничена координатами (0, 0) и (1,1). Пример кривой Зенга для логнормального распределения представлен на Рис. 3.

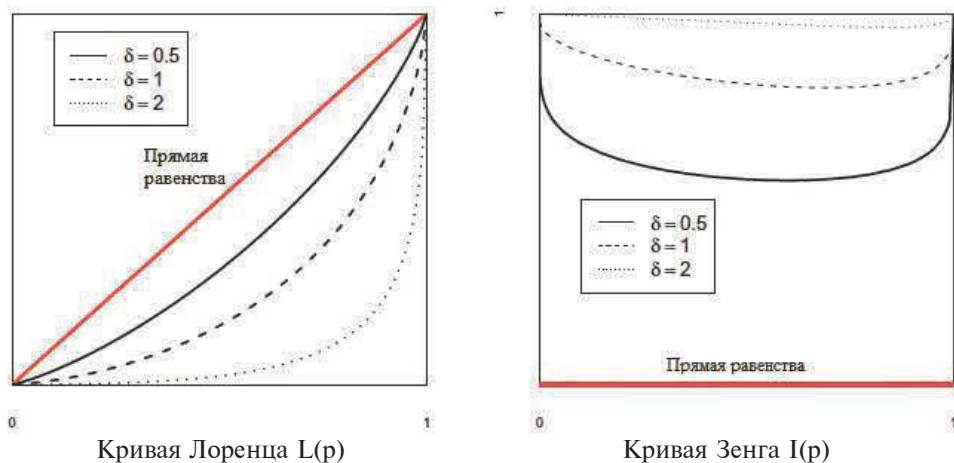


Рис. 3. Сравнение кривой Лоренца $L(p)$ и кривой Зенга $I(p)$ для логнормального распределения для различных значений дельта (δ)

Источник: (Polisicchio, Porro, 2009, p. 294).

Индекс Зенга обладает всеми статистическими свойствами, которыми должен обладать «хороший» показатель неравенства (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 40). Формула для декомпозиции индекса представлена в статье Мишель Зенги 2012 г. (Zenga, 2012).

В отличие от всех остальных индексов, представленных в данном разделе, индекс Зенга совсем не упоминается в русскоязычной научной литературе. В других странах он также пока малоизвестен, в основном его можно встретить в журналах по эконометрике. Экономисты и математики все еще обсуждают его свойства. С момента публикации индекса Зенга в 2007 г. (Zenga, 2007) появилось много статей, посвященных изучению его свойств (Arcagni, Francesco, 2013; Arcagni, Zenga, 2013;

Berti, Rigo, 2014; Greselin et al., 2010, 2014; Zenga et al., 2011, 2012) и особенностям декомпозиции (Mussini, Zenga, 2013; Radaelli, 2008, 2010; Zenga, 2012, 2013). Сравнение свойств индекса Зенга с индексом Джини составляет отдельное направление исследований (Greselin et al., 2013, 2017; Greselin, Zitikis, 2018; Langel, Tillé, 2012; Ostasiewicz, Mazurek, 2013; Pasquazzi, Zenga, 2018; Poliscchio, Porro, 2009).

Катаржина Остасевич и Эдита Мазурек (2013) сравнили свойства индекса Зенга с индексом Джини. Для этого они вычислили их значения для нескольких распределений: логнормального, распределения гамма, обратного распределения Гаусса, распределения Вейбулла и Барра (Ostasiewicz, Mazurek, 2013). Выбор этих распределений связан с тем, что они чаще других используются для аппроксимации распределений дохода. Их сравнение показало, что «индекс Зенга менее “терпим” к неравенству», чем индекс Джини (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 60). Он увеличивается быстрее для небольших отклонений от ситуации идеального равенства и снижается медленнее при небольшом перераспределении дохода (от богатых слоев к бедным). Значения индекса Зенга всегда выше, чем индекса Джини, но при этом для некоторых пар значений порядок ранжировки может отличаться. Кроме того, значения индекса Зенга лучше, чем коэффициента Джини, прогнозируются коэффициентом вариации³ (Ostasiewicz, Mazurek, 2013, p. 60).

Индексы Зенга и Джини обладают одним общим недостатком – сложность интерпретации их значений. Индекс Зенга в силу своей новизны еще менее информативный. В частности, не ясно, какие его значения говорят о высоком неравенстве, а какие – о находящемся в пределах нормы.

Сравнение показателей неравенства, их математических свойств и применения

В данном разделе представлено сравнение свойств и особенностей показателей неравенства, описанных выше. В Руководстве Всемирного банка по измерению бедности и неравенства приведены критерии, которым должны соответствовать «хорошие» меры неравенства, а именно: 1) значение коэффициента не должно быть чувствительно к изменению среднего значения распределения; 2) независимость от количества наблюдений (например, от численности населения страны); 3) симметричность (если два человека в выборке «поменяются» своими доходами, то показатель неравенства не изменится); 4) чувствительность к перераспределению (на англ. – «Pigou-Dalton Transfer Sensitivity») (при перераспределении доходов от богатых к бедным, показатель неравенства уменьшится); 5) статистическая тестируемость (возможность посчитать доверительные интервалы и оценить статистическую значимость

³ Коэффициент вариации вычисляется по формуле: $V = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$, где $\text{Var}(X)$ – дисперсия,

$E(X)$ – ожидаемые значения случайной величины X .

изменений с течением времени); б) полная разложимость (или декомпозиция) на составляющие неравенства (Naughton, Khandker, 2009, p. 105–106). Большинство из этих критериев были сформулированы Хью Далтоном в 1920 г.

Как минимум трем из шести данных критериев соответствуют все рассмотренные нами показатели неравенства, за исключением наиболее простых, а именно: размах⁴ доли доходов отдельных групп населения, децильные коэффициенты дифференциации и коэффициент Пальма. Свойством независимости от шкалы доходов и размера населения обладают коэффициент Джини, среднее логарифмическое отклонение, индекс Тейла, коэффициент вариации, коэффициент Аткинсона, индекс Пьетра (Робин Гуда) и индекс Зенга.

Свойство полной разложимости не считается обязательным для показателей неравенства. Так, наиболее часто используемый для оценок неравенства коэффициент Джини соответствует всем требованиям, кроме этого, — его значение для всего населения не равно сумме коэффициентов для составляющих его групп. С другой стороны, менее популярные в исследованиях показатели общей энтропии (среднее логарифмическое отклонение, индекс Тейла, коэффициент вариации) и индекс Аткинсона обладают данным свойством полной разложимости.

В табл. 1 представлено сравнение рассмотренных показателей неравенства. В качестве оснований для сравнения мы использовали как признаки «хороших» показателей неравенства, так и другие, а именно отражающие специфику неравенства в России — наличие тяжелого правого хвоста (Ibragimov et al., 2012, 2018).

Информацию о всем распределении доходов отражают индекс Джини, все показатели общей энтропии (индекс Тейла, среднее логарифмическое отклонение, коэффициент вариации), индекс Аткинсона, индекс Пьетра и индекс Зенга. Данные показатели различаются степенью и характером зависимости от кривой распределения доходов. Индекс Джини, хотя и приписывает всем частям распределения равные веса, но все же более чувствителен к изменениям в средней части распределения (Gastwirth, 2017). Индекс Тейла учитывает все части распределения с равными весами. Среднее логарифмическое отклонение больше подходит для оценки неравенства в нижней части распределения, а коэффициент вариации — в верхней части.

Чувствительность к распределению доходов индекса Аткинсона различается в зависимости от выбранного параметра неприятия неравенства ε . Чем больше значения ε , тем более индекс чувствителен к изменениям в нижней части распределения. В большинстве исследований применяются значения параметра ε : 0,5, 1 и 2. Значение ε , равное нулю, означает, что население равнодушно к любым проявлениям неравенства. В целом же, чаще всего индекс Аткинсона используется для изучения неравенства в нижней части распределения.

⁴ Под размахом здесь понимается разница между максимальным и минимальным значением дохода.

Индекс Пьетра, по сравнению с коэффициентом Джини, содержит в себе больше информации о верхних и нижних хвостах распределений. Более того, данный индекс имеет практическое применение – для расчетов примерной «стоимости» достижения равенства. Он показывает, какую долю дохода нужно перераспределить от богатых к бедным для приближения к ситуации полного равенства.

Индекс Зенга – это совершенно новый синтетический показатель. Он представляет собой взвешенное арифметическое среднее точечных мер. Индекс Зенга наделен всеми свойствами, которые ожидаются от «хороших» показателей неравенства. Данный индекс отличается от всех остальных тем, что его значение увеличивается быстрее для небольших отклонений от ситуации идеального равенства и снижается медленнее при небольшом перераспределении дохода от богатых к бедным. Поэтому принято говорить, что он менее «терпим» к неравенству, чем индекс Джини.

Проведенный сравнительный анализ показателей неравенства с учетом их математических свойств и применения позволяет сформулировать ряд рекомендаций по расширению списка показателей, традиционно используемых для оценки неравенства в России. Помимо стандартных показателей дифференциации доходов (таких, как коэффициент Джини и децильный коэффициент), представляется важным, включить показатели, учитывающие особенности распределения доходов россиян в концах распределений, особенно среди бедных слоев населения (коэффициент Пальма), а также показатели концентрации доходов, чувствительные к изменению доходов среди бедных слоев населения (среднее логарифмическое отклонение и индекс Аткинсона с параметром ϵ около 1 и более). Данные показатели, помимо прочего, обладают свойством полной разложимости на составляющие.

Таблица 1

Сравнение показателей неравенства: преимущества и недостатки

Показатель	Преимущества	Недостатки	Применение
Коэффициент Джини	– Популярность. Наиболее известный и часто используемый экономистами показатель. – Интуитивно понятный и легко интерпретируемый. – Можно изобразить графически. – Включает в расчет все распределение. – Можно сравнивать значения коэффициента для выборок различного размера и за разные временные периоды.	– Зависит от кривой распределения доходов. Более чувствителен к изменениям в средней части распределения. – Не разложим на составляющие без остатка. Остаток от распределения не поддается интерпретации. – Для расчета необходимы детальные данные на уровне индивидов.	Для измерения степени равномерности распределения доходов среди всего населения отдельного региона или страны.

Показатель	Преимущества	Недостатки	Применение
Индекс Пьетра (Робин Гуда)	– Можно изобразить графически. – По сравнению с коэффициентом Джини, содержит в себе больше информации о верхних и нижних хвостах распределений. – Практическое применение. Дает количественную оценку доли дохода, которую необходимо перераспределить для достижения равенства.	– Не разложим на составляющие без остатка. – Сложная процедура декомпозиции неравенства на внутри- и межгрупповое (более подробно см. Nabib, 2012). – Для расчета необходимы детальные данные на уровне индивидов.	Для расчетов примерной «стоимости» достижения равенства. Коэффициент показывает, какую долю дохода нужно перераспределить от богатых к бедным для приближения к ситуации полного равенства.
Размах	– Легко рассчитать. – Менее чувствителен к выбросам, по сравнению с размахом.	– Формула для расчета включает только два наблюдения. – Значения наблюдений не взвешены. Не подходит для сравнения населения разных стран. – Очень чувствителен к выбросам.	Для оценок неравенства населения одной страны. Не подходит для межстрановых сравнений.
Децильные коэффициенты дифференциации, коэффициент фондов	– Интуитивно понятный и легко интерпретируемый. – Математическая легкость расчета.	– Потеря информации. Не отражает изменения в частях распределения, не включенных в анализ. – Не соответствует всем требованиям к «хорошим» показателям неравенства.	Для изучения распределения доходов в определенной части распределения, например, для сравнения доходов верхнего и нижнего дециля.
Коэффициент Пальма	– Интуитивно понятный и легко интерпретируемый. – Математическая легкость расчета.	– Не реагирует на изменения в средней части распределения. – Не соответствует всем требованиям к «хорошим» показателям неравенства.	– Для сравнения разнера и динамики доходов между малообеспеченными слоями и самым богатым верхним децилем. – Когда исследователю нужно исключить из рассмотрения среднюю часть распределения доходов. – Коэффициент Пальма является важным дополнением коэффициента Джини. Вместе они позволяют получить более полную картину неравенства.

Показатель	Преимущества	Недостатки	Применение
Индекс МакЛун	– Хорошо описывает нижнюю часть распределения. – Малоизвестный показатель.	– Не реагирует на изменения распределения доходов выше уровня медианы. – Зависит от медианного значения.	Часто используется в исследованиях неравенства в сфере образования.
Показатели общей энтропии: среднее логарифмическое отклонение, индекс Тейла, коэффициент вариации	– Разложим без остатка. – Охватывает все распределение. – Можно использовать данные на уровне групп. – Позволяет раскладывать неравенство на внутри- и межгрупповые составляющие.	– Относительная сложность расчета и интерпретации. – Не позволяет напрямую сравнивать страны с различной численностью населения. – Для расчета необходимы детальные данные на уровне индивидов. – Значения индекса за один временной период относительно плохо интерпретируемы. Больше подходит для сравнения динамики изменения неравенства.	– Для оценки вклада в общее неравенство отдельных групп населения. – Группы для декомпозиции не должны пересекаться. - Среднее логарифмическое отклонение больше подходит для оценки неравенства в нижней части распределения. - Индекс Тейла приписывает всем частям распределения равные веса. - Коэффициент вариации больше подходит для оценки неравенства в верхней части распределения.
Индекс Аткинсона	– Интуитивно понятный и легко интерпретируемый. – Прикладная значимость: дает денежную оценку «стоимости» неравенства.	– В основе индекса лежат определенные допущения о функции социального благосостояния. – Значения зависят от выбора параметра неприятия неравенства. Не существует ясных требований для его выбора.	– Для изучения неравенства в нижней части распределения, например, как дополнение к показателям уровня бедности. – Рекомендуются проводить расчеты одновременно для разных значений параметра неприятия неравенства. Наиболее часто используемые значения параметра: 0,5, 1 и 2.
Индекс Зенга	– Индекс Зенга менее «терпим» к неравенству», чем индекс Джини. Он увеличивается быстрее для небольших отклонений от ситуации идеального равенства и снижается медленнее при небольшом перераспределении дохода (от богатых слоев к бедным).	– Сложность интерпретации. – Для расчета необходимы детальные данные на уровне индивидов.	Для измерения степени равномерности распределения доходов среди всего населения отдельного региона или страны.

Показатель	Преимущества	Недостатки	Применение
	— Можно изобразить графически. — Включает в расчет все распределение. — Можно сравнивать значения коэффициента для выборок различного размера и за разные временные периоды.		

Источник: (Cowell, 2009, p. 72, 153; Klasen et al., 2016, p. 23; Burkholder, 2003 и др.).

Выводы

В данной статье рассмотрены основные показатели неравенства, используемые в международных исследованиях неравенства. Представлен также ряд относительно новых показателей, которые могут быть полезны для измерения динамики и структуры неравенства в России, среди которых коэффициент Пальма и индекс Зенга. Самым молодым из них является индекса Зенга. Он появился в 2007 г. в качестве альтернативы коэффициенту Джини, и экономисты все еще продолжают изучать его свойства.

Каждый из представленных в статье показателей имеет свои ограничения и описывает разные аспекты неравенства. Показатели концентрации доходов — коэффициент Джини, индекс Зенга, показатели общей энтропии и индекс Аткинсона с параметрами, придающими равный вес разным частям распределения, — показывают, насколько равномерно или неравномерно распределены доходы, но не дают информацию о том, в сторону каких групп (децилей) населения происходит перекося распределения доходов. Поэтому сами по себе они несут в себе недостаточно информации для принятия тех или иных государственных мер, направленных на снижение уровня неравенства или улучшение положения определенных групп населения. Поэтому, наряду с ними, представляется важным оценивать и более простые показатели: децильный коэффициент, коэффициент Пальма и доли доходов отдельных групп населения. Расширение списка показателей для оценок неравенства позволит получить более полную картину неравенства в России.

При использовании в исследованиях неравенства коэффициентов концентрации доходов необходимо принимать во внимание, с каким весом включаются в расчет отдельные части распределения доходов. Если коэффициент Джини более чувствителен к неравенству в средней части распределения доходов, то среднее логарифмическое отклонение и индекс Аткинсона с параметром ε около 1 и более придают больший вес неравенству в нижней части распределения (среди низкодоходных групп населения). Более чувствителен к неравенству в верхней части распределения коэффициент вариации. Данные свойства среднего логарифмического отклонения и индекса Аткинсона делают их полезными для оценки неравенства в обществе с высокой долей бедного населения.

Сравнение оценок этих показателей с коэффициентом Джини позволяет выявить не только уровень неравенства, но и в какой части распределения населения по доходам нарушено равновесие.

Литература

1. *Anand, S. and Segal, P.* «The Global Distribution of Income», in (eds.) Anthony B. Atkinson and Francois Bourguignon // *Handbook of Income Distribution*, Volume 2A. Amsterdam: North-Holland. 2015. P. 937–979.
2. *Arcagni A., Francesco P.* On the parameters of Zenga distribution // *Statistical Methods and Applications*. 2013. Vol. 22. P. 285–303.
3. *Arcagni A., Zenga M.* Application of Zenga's distribution to a panel survey on household incomes of European Member States // *Statistica and Applicazioni*. 2013. Vol. 11. P. 79–102.
4. *Atkinson A. B.* On the Measurement of Inequality // *Journal of Economic Theory*. Vol. 2. 1970. P. 244–263.
5. *Bellu L.G., Liberati P.* Policy Impacts on Inequality: Welfare Based Measures of Inequality – the Atkinson Index // *Food and Agriculture Organization of the United Nations*. 2006.
6. *Berti P., Rigo P.* Concentration Curve and Index, Zenga's // *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*. 2014. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118445112.stat03450> (дата обращения 01.05.2019).
7. *Burkholder P.* University of Texas Inequality Project. 2003. URL: http://utip.gov.utexas.edu/tutorials/intro_ineq_studies.ppt (дата обращения 01.05.2019).
8. *Cobham A., Schlogl L., Sumner A.* Inequality and the Tails: The Palma Proposition and Ratio Revisited // *UN DESA Working Paper 143*. New York: UN DESA, 2015.
9. *Cowell F.* Measuring inequality /Oxford University Press, *Handbook of Economic Inequality* // Oxford: Oxford University Press, 2009.
10. *Dalton H.* The measurement of the inequality of incomes // *The Economic Journal*. 1920. Vol. 30. P. 348–361.
11. *De Maio F.* Income inequality measures. // *J Epidemiol Community Health*. 2007. Vol. 61 (10). P. 849–852.
12. *Farris F.* The Gini Index and Measures of Inequality // *The American Mathematical Monthly*. 2010. Vol. 117, No. 10. P. 851–864.
13. *Gastwirth J.* Is the Gini Index of Inequality Overly Sensitive to Changes in the Middle of the Income Distribution? // *Statistics and Public Policy*. 2017. 4:1. P. 1–11.
14. *Greselin F., Pasquazzi L., Zitikis R.* Contrasting the Gini and Zenga indices of economic inequality // *Journal of Applied Statistics*. 2013. Vol. 40 (2). P. 282–297.
15. *Greselin F., Pasquazzi L., Zitikis R.* Heavy tailed capital incomes: Zenga index, statistical inference, and ECHP data analysis // *Extremes*. March 2014. Vol. 17, Issue 1. P. 127–155.
16. *Greselin F., Pasquazzi L., Zitikis R.* Zenga's New Index of Economic Inequality, Its Estimation, and an Analysis of Incomes in Italy // *Journal of Probability and Statistics*. Volume 2010. URL: <https://www.hindawi.com/journals/jps/2010/718905/> (дата обращения 01.05.2019).
17. *Greselin F., Pellegrino S., Vernizzi A.* Gini versus Zenga Inequality Index: A New Approach to Measuring Tax Redistribution and Progressivity // *Conference Paper. Societ'a Italiana di Economia Pubblica – SIEP, XXIX Riunione Scientifica, Universit'a degli Studi di Catania*. – 21–22 September, 2017.
18. *Greselin F., Zitikis R.* From the Classical Gini Index of Income Inequality to a New Zenga-Type Relative Measure of Risk: A Modeller's Perspective. // *Econometrics*. 2018. 6 (1), 4. P. 1–20.

19. *Habib E.* On the decomposition of the Schutz coefficient: an exact approach with an application. // Electronic Journal of Applied Statistical Analysis EJASA. 2012. Vol. 5, Issue 2. P. 187–198.
20. *Hale T.* The Theoretical Basics of Popular Inequality Measures // University of Texas Inequality Project. 2014. P.2. URL: <https://utip.lbj.utexas.edu/tutorials.html> (дата обращения 01.05.2019).
21. *Haughton J., Khandker Sh.* Handbook on poverty and inequality // The International Bank for Reconstruction and Development. – The World Bank. Washington, DC, 2009.
22. *Hicks D.* The inequality adjusted Human Development Index: a constructive proposal // World Development. 1997. Vol. 25. P. 1283–1298.
23. *Ibragimov M., Ibragimov R.* Heavy tails and upper-tail inequality: The case of Russia // Empirical Economics. March 2018. Vol. 54, Issue 2. P. 823–837.
24. *Ibragimov M., Ibragimov R., Karimov J., Yuldasheva G.* Robust Analysis of Income Inequality Dynamics in Russia: t-Statistic Based Approaches. // The wiiw Balkan Observatory. Working Paper. 2012. Vol. 105. P. 1–37.
25. *Kelly A.* Measuring equity in educational effectiveness research: the properties and possibilities of quantitative indicators // International Journal of Research & Method in Education. 2015. Vol. 38, № 2. P. 115–136.
26. *Klasen S., Scholl N., Lahoti R., Ochmann S., Vollmer S.* Inequality – worldwide trends and current debates // Courant Research Centre: Poverty, Equity and Growth – Discussion Papers, No. 209. Göttingen, 2016.
27. *Langel M., Tillé Y.* Inference by linearization for Zenga's new inequality index: A comparison with the Gini index // Metrika. 2012. Vol. 75(8). P. 1093–1110.
28. *Milanovic B.* A simple way to calculate the Gini coefficient, and some implications // Economics Letters. 1997. 56. P. 45–49.
29. *Milanovic B.* Global Income Inequality in Numbers: in History and Now // Global Policy. 2013. 4 (2) P. 198–208.
30. *Mussini M., Zenga M.* A longitudinal decomposition of Zenga's new inequality index // Statistica and Applicazioni. 2013. Vol. 11. P. 63–77.
31. *Novokmet F., Piketty T., Zucman G.* From Soviets to oligarchs: inequality and property in Russia, 1905–2016 // The Journal of Economic Inequality, Springer, Society for the Study of Economic Inequality. 2018. Vol. 16 (2). P. 189–223. URL: <http://piketty.pse.ens.fr/files/NPZ2017WIDworld.pdf#page=34&zoom=100,0,177> (дата обращения 02.05.2019 г.).
32. *Ostasiewicz K., Mazurek E.* Comparison of the Gini and Zenga indexes using some theoretical income distributions abstract // Operations Research and Decisions, Wroclaw University of Technology, Institute of Organization and Management. 2013. Vol. 1. P. 37–62.
33. *Palma G.* Has the Income Share of the Middle and Upper-middle been Stable over Time, or Is Its Current Homogeneity across the World the Outcome of a Process of Convergence? The «Palma Ratio» Revisited / Cambridge Working Papers in Economics 1437 // Cambridge: University of Cambridge, 2014.
34. *Palma G.* Homogeneous middles vs. heterogeneous tails, and the end of the 'Inverted-U': it's all about the share of the rich // Development and Change. January 2011. Vol. 42, No. 1. P. 87–153.
35. *Pasquazzi L., Zenga M.* Components of Gini, Bonferroni, and Zenga Inequality Indexes for EU Income Data // Journal of Official Statistics. 2018. Vol. 34, № 1. P. 149–180.
36. *Polisicchio M., Porro F.* A comparison between Lorenz L(p) curve and Zenga I(p) curve // Statistica Applicata. 2009. Vol. 21 (3–4). P. 289–301.
37. *Popova D., Rudberg A.* Inequality in Income and Wealth in Russia / Global Encyclopedia of Public Administration, Public Policy, and Governance. – Switzerland: Springer, 2018. P. 1–12.
38. *Punt C. et al.* Measure of Poverty and Inequality: A Reference Paper. // PROVIDE Project Technical Paper. Elsenburg, October 2003. No 4.

39. Pyatt G., Chen C.-N., Fei J. The Distribution of Income by Factor Components // Quarterly Journal of Economics. 1980. November. P. 451–473.
40. Radaelli P. A subgroups decomposition of Zenga's uniformity and inequality indexes // Statistica and Applicazioni. 2008. Vol. 6 (2). P. 117–136.
41. Radaelli P. On the decomposition by subgroups of the Gini index and Zenga's uniformity and inequality indexes // International Statistical Review. 2010. Vol. 78. P. 81–101.
42. Sen A. On Income Inequality // Oxford: Clarendon Press, 1997.
43. Stuart A., Ord K. Kendall's Advanced Theory of Statistics. Volume 1: Distribution Theory, 6th Edition // Holder Arnold, London, 1994.
44. UN. Inequality Measurement // Development Issues № 2. – October 2015. P. 2. URL: https://www.un.org/en/development/desa/policy/wess/wess_dev_issues/dsp_policy_02.pdf (дата обращения 01.05.2019).
45. UNDP. Human Development Report 2016: Human Development for Everyone // United Nations Development Programme. New York, 2016.
46. Van Zanden J.L., Baten J., Foldvari, P., Van Leeuwen, B. The Changing Shape of Global Inequality 1820-2000: Exploring a new dataset // Review of Income and Wealth. 2014. Vol. 60, Issue 2. P. 279–297.
47. Zenga M. Decomposition by sources of the Gini, Bonferroni and Zenga inequality indexes // Statistica & Applicazioni. 2013. Vol. 11 (2). P. 133–161.
48. Zenga M. Decomposition of Zenga's Inequality Index by Sources // Statistica & Applicazioni. 2012. Vol. 10. P. 3–31.
49. Zenga M. Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means // Statistica & Applicazioni. 2007 Vol. 5. P. 3–27.
50. Zenga M., Pasquazzi L., Poliscchio M., Zenga Ma. More on M. M. Zenga's new three-parameter distribution for non-negative variables // Statistica and Applicazioni. 2011. Vol. 9. P. 5–33.
51. Zenga M., Pasquazzi L., Zenga Ma. First applications of a new three-parameter distribution for non-negative variables // Statistica and Applicazioni. 2012. Vol. 10. P. 131–147.
52. Авраимова Е.М., Малева Т.М. О причинах воспроизводства социально-экономического неравенства: что показывает ресурсный подход? // Вопросы экономики. 2014. № 7. С. 144–160.
53. Аганбегян А.Г. Преодоление бедности и сокращение неравенства по доходам и потреблению в России // ЭКО. 2017. №9. С. 66–86.
54. Аникин В.А., Тихонова Н.Е. Бедность и неравенство в странах БРИКС: российская специфика // Общество и экономика. 2016. № 1. С. 78–115.
55. Бурдяк А.Я. Обеспеченность жильем в постсоветской России: неравенство и проблема поколений // Журнал исследований социальной политики. 2015. Т. 13, № 2. С. 273–288.
56. Григорьев Л.М. Социальное неравенство в мире – интерпретация неочевидных тенденций // Журнал Новой экономической ассоциации. 2016. №3. С. 160–169.
57. Григорьев Л.М., Павлюшина В.А. Межстрановое неравенство: динамика и проблема стадий развития // Вопросы экономики. 2018. № 7. С. 5–29.
58. Григорьев Л.М., Салмина А.А. «Структура» социального неравенства современного мира: проблемы измерения // Социологический журнал. 2013. № 3. С. 5–21.
59. Джомо К.С., Попов В.В. Долгосрочные тенденции в распределении доходов // Журнал Новой экономической ассоциации. 2016. №3. С. 146–160.
60. Зубаревич Н.В. Неравенство доходов населения: пространственная проекция // Pro et Contra. 2013. Т. 17, № 6. С. 48–60.
61. Капелюшников Р.И. Неравенство: как не примитивизировать проблему // Вопросы экономики. 2017. № 4. С. 117–139.
62. Овчарова Л.Н. и др. Динамика монетарных и немонетарных характеристик уровня жизни российских домохозяйств за годы постсоветского развития: аналитический доклад / рук. авт. колл. Л.Н. Овчарова, А.Я. Бурдяк, А.И. Пишняк, Д.О. Попова, Р.И. Попова, А.М. Рудберг // М.: Фонд «Либеральная Миссия», 2014.

-
63. *Овчарова Л.Н., Попова Д.О., Рудберг А.М.* Декомпозиция факторов неравенства доходов в современной России // Журнал новой экономической ассоциации. 2016. № 3 (31). С. 170–186. URL: <http://journal.econorus.org/pdf/NEA-31.pdf> (дата обращения 30.04.2019).
 64. *Салмина А.А.* Избыточное неравенство и развитие человеческого потенциала // Доклад о человеческом развитии в Российской Федерации за 2014 год / Науч. ред.: Л.М. Григорьев, С.Н. Бобылев // М.: Аналитический центр при Правительстве Российской Федерации, 2014. Гл. 5. С. 85–105.
 65. *Стукаленко Е.А.* Межрегиональная дифференциация доходов населения в России // Экономическое развитие стран евразийской интеграции: монография / под ред. Г.П. Литвинцевой // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. С. 102–111.